DM n°3 : Fonctions usuelles – Corrigé

Note totale sur 40 points, $\pm$ 2 points pour le soin.

- **Une variable non introduite ou une confusion entre $f(x)$ et f : $-0{,}5$ par question**
- **Truandage : 0 à la question**

Exercice 1 : des fonctions gentilles (32 pts)

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right).$$

On va montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

1)

a) Déterminer le domaine de définition D de f et g. **(1,5 pts)**

Pour la fonction f, arctan et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ par composition.

Pour la fonction g, ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}$ a un sens car $1+\mathrm{ch}(x) \geq 2 > 0$. Par composition, g est définie sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{D = \mathbb{R}}$

- **0,5 pour dire que** arctan **et/ou sh et/ou ch sont définie sur $\mathbb{R}$**
- **0,5 pour justifier que $1 + \mathrm{ch}x \neq 0$**
- **0,5 pour la bonne réponse $D = \mathbb{R}$.**

b) Montrer que f et g sont dérivables sur D. Calculer f' et g'. **(5 pts)**

f et g sont dérivables (sur D) comme composition et quotient de fonctions dérivables (sur D). Pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{sh}^2x}\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}\mathrm{ch}x = \boxed{\frac{1}{2\mathrm{ch}x}}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right)^2} \times \frac{\mathrm{ch}x(1+\mathrm{ch}x)-\mathrm{sh}^2x}{(1+\mathrm{ch}x)^2}\\
&= \frac{1}{(1+\mathrm{ch}x)^2+(\mathrm{sh}x)^2} \times \left(\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x\right)\\
&= \frac{1}{1+2\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x} \times (\mathrm{ch}x+1)\\
&= \frac{1}{1+2\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}^2x+(\mathrm{ch}^2x-1)} \times (\mathrm{ch}x+1)\\
&= \frac{1}{2\mathrm{ch}x+2\mathrm{ch}^2x} \times (\mathrm{ch}x+1)\\
&= \boxed{\frac{1}{2\mathrm{ch}x}}
\end{aligned}$$

- **1 pour justifier que les fonctions sont dérivables**
- **1,5 pour le calcul de $f'(x)$**
- **2,5 pour le calcul de $g'(x)$**

c) En déduire le résultat voulu. **(3,5 pts)**

Par la question précédente, $f' = g'$, ou encore $(f-g)' = 0$. Comme $D = \mathbb{R}$ est un **intervalle**, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $f - g = C$.

Pour montrer que $f = g$, il suffit de montrer que $C = 0$. Or,

$$C = f(0) - g(0) = \frac{1}{2}\arctan(0) - \arctan\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 - 0 = 0$$

Ainsi, $\boxed{f = g}$.

- **1 pour $(f-g)' = 0$ et donc $f - g$ est constante**
- **1 pour avoir dit que $\mathbb{R}$ était un intervalle**
- **1,5 pour montrer que $C = 0$, et la conclusion $f = g$**

2)

a) Rappeler le domaine de définition E de la fonction tan. **(1,5 pt)**

$$\boxed{E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}} \qquad \left(\text{ou bien } \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right)$$

- **1 pour la bonne réponse. Si l'ensemble est mal écrit, $-0{,}5$.**

b) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2f(x) \in E$. Pour x dans D, calculer $\tan(2f(x))$. **(2,5 pts)**

Soit $x \in D$. On a $2f(x) = \arctan(\mathrm{sh}x)$. Or, $\arctan(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $2f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset E$. Ainsi, $\boxed{2f(x) \in E}$, et

$$\tan(2f(x)) = \tan(\arctan(\mathrm{sh}x)) = \boxed{\mathrm{sh}x}$$

(car $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$)

- **1,5 pour justifier que** $2f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- **1 pour le calcul de** $\tan(2f(x))$

c) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$ est à valeurs dans $]-1, 1[$. **(5 pts)**

On sait que $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ est à valeurs dans $]-1, 1[$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \frac{|\mathrm{sh}x|}{1+\mathrm{ch}x} \\ &\leq \frac{|\mathrm{sh}x|}{\mathrm{ch}x} \\ &= |\mathrm{th}x| < 1 \end{aligned}$$

on en déduit que $h(x) \in]-1, 1[$.

- **À vous de jouer ! Ceci est la réponse la plus rapide. À vous de juger ce qui vaut 5 points sur la copie...**

d) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2g(x) \in E$. Pour x dans D, calculer $\tan(2g(x))$. **(5 pts)**

Par la question (c), on a pour tout $x \in D$

$$\begin{aligned} & -1 < h(x) < 1 \\ \Longrightarrow\ & -\frac{\pi}{4} < \arctan(h(x)) = g(x) < \frac{\pi}{4} \qquad \text{par stricte croissance de } \arctan \\ \Longrightarrow\ & -\frac{\pi}{2} < 2g(x) < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

donc, comme $g(x)$ et $2g(x)$ sont dans E,

$$\begin{aligned} \tan(2g(x)) &= \frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2 g(x)} \qquad \text{(formule } \tan(a+b) \text{ avec } b = a) \\ &= \frac{2\frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}}{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right)^2} \\ &= \frac{2\mathrm{sh}x(1+\mathrm{ch}x)}{(1+\mathrm{ch}x)^2-\mathrm{sh}^2x} \\ &= \frac{2\mathrm{sh}x+2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x}{1+2\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x} \\ &= 2\mathrm{sh}x\frac{1+\mathrm{ch}x}{2+2\mathrm{ch}x} \\ &= \boxed{\mathrm{sh}x} \end{aligned}$$

- **1 pour la justification "par stricte croissance de** $\arctan$**"**
- **1 pour justifier que** $2g(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- **0,5 pour dire que** $g(x)$ **et** $2g(x)$ **sont dans** E
- **2,5 pour le calcul de** $\tan(2g(x))$

e) En déduire le résultat voulu. **(3 pts)**

Soit $x \in D$. Par les questions (c) et (d), on a

$$\begin{aligned} & \tan(2f(x)) = \tan(2g(x)) \\ \Longrightarrow\ & \arctan(\tan(2f(x))) = \arctan(\tan(2g(x))) \\ \Longrightarrow\ & 2f(x) = 2g(x) \qquad \underline{\underline{\text{car } 2f(x), 2g(x) \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[}} \\ \Longrightarrow\ & f(x) = g(x) \end{aligned}$$

Ainsi $f = g$.

Note : on peut aussi utiliser le fait que $\tan a = \tan b \iff a \equiv b \quad [\pi]$.

- **1,5 pour la justification "car** $2f(x)$ **et** $2g(x)$ **sont dans** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$**"**
- **1,5 pour le reste**

3) Application :

a) Calculer $\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$. **(2 pts)**

$$\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} + e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3+1}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$\text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} - e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

- **1 par calcul**

b) En appliquant l'égalité $f(x) = g(x)$ en $x = \frac{1}{2}\ln(3)$, calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$. **(3 pts)**

On pose $x = \frac{1}{2}\ln 3$. Alors, par la question a),

$$\begin{aligned}
& f(x) = g(x) \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{2}\arctan(\text{sh}x) = \arctan\left(\frac{\text{sh}x}{1+\text{ch}x}\right) \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right) \underline{\underline{\in E}} \\
\Longrightarrow\ & \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)\right) \\
\Longrightarrow\ & \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}+2}}
\end{aligned}$$

- **2 pour le calcul**
- **1 pour avoir dit que** $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right) \in E$**.** Si toutefois la justification "car $2f(x)$ et $2g(x)$ sont dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$" était bien faite à la question e), la confiance du correcteur s'applique et les points sont acquis.

Exercice 2 : des fonctions méchantes (8 pts)

On veut montrer l'identité suivante :

$$\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{4} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)$$

1) Montrer que $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{4}\right) = \sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)\right)$. **(2,5 pts)**

Tout d'abord, montrons que $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12} \in [-1,1]$: il est clair que cette quantité est postive, et de plus

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12} \leq \frac{\sqrt{15}+\sqrt{15}}{12} \leq \frac{\sqrt{15}}{6} \leq \frac{\sqrt{36}}{6} = 1$$

Ainsi, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)$ a un sens. Ensuite,

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{4}\right) \\
&= \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) + \cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\times\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{15}{16}} + \sqrt{\frac{8}{9}}\times\frac{1}{4} \\
&= \frac{\sqrt{15}}{12} + \frac{\sqrt{8}}{12} \\
&= \sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)\right)
\end{aligned}$$

- **1 pour vérifier que** $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12} \in [-1,1]$
- **1,5 pour le calcul**

2) Montrer que $\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(3 pts)**

Tout d'abord, comme $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ sont **positifs**, on a $\arcsin\frac{1}{3} \geq 0$ et $\arcsin\frac{1}{4} \geq 0$. D'où $\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{4} \geq 0$.

Ensuite, par **croissance** de arcsin, on déduit que

$$\begin{aligned}\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4} &\leq \arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2}\\ &\leq \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\\ &\leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Finalement, $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- **1 pour la justification de** $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\geq 0$
- **2 pour la justification de** $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\leq\frac{\pi}{2}$

3) Conclure. **(2,5 pts)**

Par la question 1, on a

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\right)=\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)\right)$$

Appliquons la fonction arcsinus aux deux membres de l'égalité ; cela est possible car ils appartiennent à $[-1,1]$. On obtient :

$$\arcsin\left(\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)\right)\right)$$

D'une part, $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}$, donc le second membre vaut $\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)$. D'autre part, par la question 2, $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc

$$\arcsin\left(\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\right)\right)=\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}$$

Finalement, on obtient

$$\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\right)$$

- **0,5 pour avoir vérifié que les deux membres de l'égalité sont dans** $[-1,1]$**.** Mais si en question 1 on a bien vérifié que $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}\in[-1,1]$, alors la confiance du correcteur s'applique et les points sont acquis.
- **2 pour la justification des simplifications** $\arcsin(\sin(...))$

Note de soin sur ± 2 points :

- **De -1 à +1** pour la clarté du raisonnement (des phrases complètes et intelligibles)
- **De -1 à +1** pour la lisibilité de l'écriture (y compris l'aspect “aéré” de la copie)
- **-0,25** si les résultats ne sont pas encadrés
- **-0,25** si les numéros des questions ne sont pas indiqués, ou dans le désordre
- **-0,25** si les marges ne sont pas respectées, si le bandeau a été oublié
- **-0,25** si les copies rendues ne sont pas des copies doubles et/ou elles sont “sales”

Après cela, si la note de soien devait être en dessous de -2, elle est ramenée à -2.